



TITLE:

# Feynman Path Integral (幾何学における大域的解析学)

AUTHOR(S):

土屋, 昭博

---

CITATION:

土屋, 昭博. Feynman Path Integral (幾何学における大域的解析学). 数理  
解析研究所講究録 1978, 321: 121-131

ISSUE DATE:

1978-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104013>

RIGHT:

# Feynman path integral.

名大. 理. 土屋 昭博.

§0. 一次元 Schrödinger 方程式の初期値問題.

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x, t) + V(x) \varphi(x, t) \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x). \end{cases}$$

を考えよう。ここに  $V(x)$  は適当な条件をみたす、  
実数値の Potential 函数。  $\varphi_0$  は初期値。

Feynman [1] は上の方程式の解を

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{A} \int_{C_{t, \varphi}} e^{\frac{i}{2} \int_0^t \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 d\tau - i \int_0^t V(x(\tau)) d\tau} \varphi(x(0)) d\mathcal{Q}\varphi$$

と path 空間:  $C_{t, \varphi} = \{x: [0, t] \rightarrow R; x(t) = \varphi\}$   
上の Lebesgue like measure " $d\mathcal{Q}\varphi$ ", による  
積分で表わす事を試みた。ここに  $A$  はある無限大  
の定数。

ここでは  $\frac{1}{A} e^{\frac{i}{2} \int_0^t \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 d\tau} d\mathcal{Q}\varphi = d\mu_F$  とみて、  
 $\int_{C_{t, \varphi}} F(x) d\mu_F$  を  $F(x)$  に対する Functional

と可なり  $\int ? d\mu_F$  なる積分を定義しよう。

§1.  $H$  を  $\mathbb{R}$  上の separable Hilbert space とする.  $H' = H$ : dual of Hilbert space  $H$ . この  $H$  上で積分  $\int_H F(x) d\mu_F(x)$  を定義した.  $\langle x, \xi \rangle$ : dual pairing,  $x \in H, \xi \in H', \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ : 内積とする.

### 定義 1

(1)  $\xi \in H'$  について  $f(x) = e^{i\langle x, \xi \rangle}$  と表わされる

$H$  上の function  $f$  について

$$\int_H f(x) d\mu_F \equiv e^{-\frac{i}{2}\|\xi\|^2} \quad \text{と置く.}$$

(2) 変換  $\mathcal{J}: f(x) = e^{i\langle x, \eta \rangle}, \eta \in H'$  について

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(f)(\xi) &\equiv e^{\frac{i}{2}\|\xi\|^2} \int_H f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d\mu_F(x) \\ &= e^{\frac{i}{2}\|\xi\|^2} e^{-\frac{i}{2}\|\xi - \eta\|^2} = e^{-\frac{i}{2}\|\eta\|^2 + i\langle \xi, \eta \rangle} \end{aligned}$$

なる  $H'$  上の function を表える.

今  $E'_H = E' = \{ \sum a_j e^{i\langle x, \eta_j \rangle} = f(x), a_j \in \mathbb{C}, \eta_j \in H' \}$  なる  $H$  上の functions のつくる  $\mathbb{C}$ -上の vector space を表える.  $f \sim f' \Leftrightarrow f(x) = f'(x) \quad \forall x \in H$

$\mathcal{J}$  も linear に拡張する事により,  $\mathcal{J}$  は  $\mathcal{J}: E'_H \rightarrow E'_H$  なる linear map を定義する.

この逆変換  $\mathcal{F}$  を次のようにつくる事が出来る。

1)  $x \in H$  について  $H'$  上の function  $g(\xi) = e^{+i\langle x, \xi \rangle}$  に対し  $\int_{H'} e^{+i\langle x, \xi \rangle} d\hat{\mu}_F(\xi) \equiv e^{\frac{i}{2}\|x\|^2}$  とおく。

2)  $g(\xi) = e^{+i\langle y, \xi \rangle}$ ,  $y \in H$  について

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g)(x) &\equiv e^{-\frac{i}{2}\|x\|^2} \int_{H'} g(\xi) e^{+i\langle x, \xi \rangle} d\hat{\mu}_F(\xi) \\ &= e^{\frac{i}{2}\|y\|^2 + i\langle y, x \rangle} \end{aligned}$$

この時  $\mathcal{F}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F} = \text{id}$  が成立し  $\mathcal{F}: E_H \rightarrow E_H'$  の isomorphism of vector space を与える。

ここで  $H'$  上の  $\mathbb{C}$ -valued functions のつくる topological vector space を  $\mathcal{C}$  と導入しよう。

定義 2.

(1)  $\mathcal{C} = \{ \varphi: H' \rightarrow \mathbb{C} : \text{連続}, |\varphi| \equiv \sup_{\xi} |\varphi(\xi)| < \infty \}$   
Banach space with norm  $|\cdot|$ .

(2)  $\mathcal{A} = \{ \varphi: H' \rightarrow \mathbb{C}, \|\varphi\|^2 < \infty \}$  に対し  $\varphi$  は次の表現  $\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\xi)$  をもつ。

$$\varphi_n(\xi) = \langle f_n, \xi \otimes \cdots \otimes \xi \rangle, \quad \exists f_n \in \widehat{H^{\otimes n}}$$

ここに  $\widehat{H^{\otimes n}}$  は  $H$  の  $n$  次対称 tensor 積。

かつ  $\|\varphi\|^2 \equiv \sum_n \|f_n\|^2$  で定義される。

この時  $\mathcal{A}$  は  $\|\cdot\|^2$  で Hilbert space となる。

$E'$  は  $\mathcal{C}$  及び  $\mathcal{A}$  の subspace となる事を注意しよう。

変換  $\gamma: E_H \xrightarrow{\sim} E'_H$  により  $C$  及び  $A$  の norm  $|| \cdot ||$  で  $E_H$  を completion した topological vector space を  $E(C)$  及び  $E(A)$  で表わす。単に  $E$  と表わした時には  $E(C)$  又は  $E(A)$  のどちらかを表わすものとする。 $H$  を表わした時は  $E_H(C)$ ,  $E_H(A)$  又は  $E_H$  と表わす事にする。

### 定義 3

(1)  $E$  の元達を  $H$  上の Feynman integrable elements と呼ぶ

(2)  $f \in E$  に対し  $\int_H f d\mu_F \equiv \gamma(f)(0)$  で定義する。

### 注意

(1)  $f \in E$  の元は  $H$  上の各点で定義された function としての意味は一般にはもつていない。 $f \in E$

に於ては  $\int_H f(\sum_j a_j \bar{e}^{i\langle x, \eta_j \rangle}) d\mu_F \equiv \sum_j a_j \gamma(f)(\eta_j) \cdot e^{-\frac{i}{2} \|\eta\|^2}$  が意味をもつ。

(2)  $f, g \in E$  はつては 積  $f \cdot g$  は一般には意味をもたない。

### Proposition 1.

$\gamma: E(A) \rightarrow A$  は iso. of Hilbert space.

証明. injection は定義より O.K. onto のみが問題.

$$s_1, \dots, s_e \in \mathbb{R}, \eta_1, \dots, \eta_e \in H' \text{ に対して } f(x; s_1, \dots, s_e) \\ \equiv e^{i \sum_{j=1}^e s_j \langle x, \eta_j \rangle} \text{ とおく.}$$

$$\mathcal{J}(f)(\xi) = e^{-i \langle \sum_{j=1}^e s_j \eta_j, \xi \rangle}$$

$$= \sum_n \sum_{n_1 + \dots + n_e = n} \frac{(-i)^n n_1! \dots n_e!}{n!} s_1^{n_1} \dots s_e^{n_e} \\ \cdot \langle \eta_1, \xi \rangle^{n_1} \dots \langle \eta_e, \xi \rangle^{n_e}$$

故は  $\mathcal{J}(f)(\cdot; \cdot); \mathbb{R}^e \rightarrow A$  とは real analytic function. だからその係数連  $\langle \eta_1, \xi \rangle^{n_1} \dots \langle \eta_e, \xi \rangle^{n_e}$  は  $E(A)$  の image. 一方  $A$  は  $\langle \eta_1, \xi \rangle^{n_1} \dots \langle \eta_e, \xi \rangle^{n_e}$  の形の元素で張られる. 故に onto が示された.

次に  $\eta_1, \dots, \eta_e \in H'$  に対して  $f(x) \equiv \langle x, \eta_1 \rangle^{n_1} \dots \langle x, \eta_e \rangle^{n_e}$  と表わされる  $H$  上の function を考えよう. この形の  $\mathbb{C}$  上の一次結合を  $H$  上の多項式と呼ぼう.

Proposition 2.

多項式は  $E(A)$  の元である.

証明.  $\langle x, \eta_1 \rangle^{n_1} \dots \langle x, \eta_e \rangle^{n_e} \in E(A)$  をいえるのはよい.

$$g(x; s_1, \dots, s_e) = e^{i \sum_{j=1}^e s_j \langle x, \eta_j \rangle} \text{ とおく}$$

$$g(x; s) = \sum_n \sum_{n_1 + \dots + n_e = n} \frac{i^n n_1! \dots n_e!}{n!} s_1^{n_1} \dots s_e^{n_e}$$

$$\langle x, \eta_1 \rangle^{n_1} \dots \langle x, \eta_e \rangle^{n_e}$$

$$\text{一方 } \mathcal{J}(g)(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\|\sum \theta_j \eta_j\|^2 + i\langle \sum \theta_j \eta_j, \xi \rangle}$$

この函数は  $\mathbb{R}^l \rightarrow A$  と考え  $\mathbb{R}$  real analytic.

だから その  $a_1^{n_1} \dots a_l^{n_l}$  についての係数も  $A$  の元. 故に  $\mathcal{J}(\langle x, \eta_1 \rangle^{n_1} \dots \langle x, \eta_l \rangle^{n_l}) \in \mathcal{F}$ . 故に

$$\langle x, \eta_1 \rangle^{n_1} \dots \langle x, \eta_l \rangle^{n_l} \in F(A).$$

例.  $\eta \in H'$  について  $f(x) = \langle x, \eta \rangle^n$  を考える.

$$g(x, s) = e^{i\langle x, \eta \rangle s} = \sum_n \frac{i^n}{n!} s^n \langle x, \eta \rangle^n.$$

$$\mathcal{J}(g)(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\|\eta\|^2 s^2 + i\langle \eta, \xi \rangle s}$$

$$= \sum_n \sum_{\ell+2m=n} \frac{(-i)^\ell (i)^m}{\ell! m! 2^m} s^n \|\eta\|^{2m} \langle \xi, \eta \rangle^\ell.$$

$$\mathcal{J}(\langle x, \eta \rangle^n)(\xi)$$

$$= \sum_{\ell+2m=n} \frac{n!}{\ell! m! 2^m} i^m \|\eta\|^{2m} \langle \xi, \eta \rangle^\ell$$

$$\int_H \langle x, \eta \rangle^n d\mu_F = \begin{cases} \frac{(2m)!}{m! 2^m} i^m \|\eta\|^{2m} & \text{if } n=2m \\ 0 & n: \text{odd.} \end{cases}$$

今  $H = H_1 \oplus H_2$  : direct sum of Hilbert spaces とする。

Proposition 3

(1)  $f_1 \in E_{H_1}$ ,  $f_2 \in E_{H_2}$  に対し 積  $f = f_1 \cdot f_2 \in E_H$  が定義できて.

$$J(\varphi)(\xi_1 \oplus \xi_2) = J_{H_1}(\varphi_1)(\xi_1) \cdot J_{H_2}(\varphi_2)(\xi_2).$$

$$\int_H \varphi d\mu_F = \left( \int_{H_1} \varphi_1 d\mu_F \right) \cdot \left( \int_{H_2} \varphi_2 d\mu_F \right).$$

(2)  $p: H \rightarrow H_1$ : orthogonal projection である。

$\varphi \in E_{H_1}$  について pull-back  $p^*\varphi \in E_H$  が定義できて、

$$J_H(p^*\varphi)(\xi_1 \oplus \xi_2) = J_{H_1}(\varphi)(\xi_1), \quad \xi_1 \oplus \xi_2 \in H_1 \oplus H_1^\perp = H.$$

$$\int_H p^*\varphi d\mu_F = \int_{H_1} \varphi d\mu_F$$

証明. 定義にもとづけばよい。

$H = \mathbb{R}^n$  finite dim. Hilbert space とする。

$f(x) = e^{i\langle x, \xi \rangle}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  について. 定義より.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu_F = e^{-\frac{i}{2}\|\xi\|^2}$$

$$\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{\frac{i}{2}\|x\|^2} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{\frac{i}{2}\|x\|^2 - \varepsilon\|x\|^2} dx \quad \text{と考える}$$

$$= (\sqrt{2\pi i})^n e^{-\frac{i}{2}\|\xi\|^2}$$

ただし  $\sqrt{i} = e^{\frac{i}{4}}$  と考える。



この事から  $\mathbb{R}^n$  上では

$$d\mu_F = \frac{e^{\frac{i}{2}\|x\|^2}}{(\sqrt{2\pi i})^n} dx \quad \text{と考える。}$$

Proposition 4.

$\mathbb{R}^n$  上で考えると

$$\mathcal{J}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) e^{\frac{i}{2}\|x-\xi\|^2}}{(\sqrt{2\pi i})^n} dx \quad \text{が成立する。}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu_F = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) e^{\frac{i}{2}\|x\|^2}}{(\sqrt{2\pi i})^n} dx.$$

§2.  $t > 0$ ,  $g \in \mathbb{R}$  を固定しよう. Hilbert space  $H$  とし  $H = \{ \gamma: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}, \gamma(t) = g \}$ .  $\gamma$ : 絶対連続  $\int_0^t |\dot{\gamma}(\tau)|^2 d\tau < \infty$  とし.  $\|\gamma\|^2 = \int_0^t |\dot{\gamma}(\tau)|^2 d\tau$  で Hilbert space とする.  $H \ni \gamma \rightarrow \dot{\gamma} \in L^2([0, t])$  によって,  $H$  と  $L^2([0, t])$  は Hilbert space の同型を与える。

$0 \leq t_1 < t_2 \leq t$   $\Delta = [t_1, t_2]$  について  $\chi_\Delta$  で  $\Delta$  の特性函数を表わす. この時  $\chi_\Delta \in L^2$ ,  $\|\chi_\Delta\|^2 = |\Delta| = |t_2 - t_1|$ .

1)  $s \in [0, t]$  に対し.  $H \ni \gamma \rightarrow \gamma(s) \in \mathbb{R}$  なる函数を考える.  $\gamma(s) = g + \int_s^t \dot{\gamma}(\tau) d\tau = g + \langle \dot{\gamma}, \chi_{[s, t]} \rangle$  と表わされる. こゝに  $\langle, \rangle$  は  $L^2([0, t])$

の内積. ( $f \rightarrow f$  で  $H \in L^2([0, t])$  と identify し  
内積, norm は  $L^2([0, t])$  の内積. norm で  
表わす事とする。) この時.  $f \in H \rightarrow f(z) \in \mathbb{R}$  なる  
function は  $E(A)$  の元.

2)  $\Delta = [t_1, t_2] \subseteq [0, t]$   $t_1 < t_2$  について

$H \ni f \rightarrow f(\Delta) \equiv f(t_2) - f(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(z) dz$   
 $= \langle f, \chi_\Delta \rangle$  と表わされる. 故に この 函数 も  
 $E(A)$  の元.

3)  $\Delta_i = [t_i, t'_i] \subseteq [0, t]$ ,  $t_i < t'_i$   $i = 1, \dots, n$ .

今  $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$  if  $i \neq j$  とする.  $\langle \frac{\chi_{\Delta_i}}{\sqrt{\Delta_i}}, \frac{\chi_{\Delta_j}}{\sqrt{\Delta_j}} \rangle = \delta_{ij}$ .

$\frac{f(\Delta_j)}{\sqrt{\Delta_j}} = \langle f, \frac{\chi_{\Delta_j}}{\sqrt{\Delta_j}} \rangle$  と表わされるから

$H \ni f \rightarrow (\frac{f(\Delta_1)}{\sqrt{\Delta_1}}, \dots, \frac{f(\Delta_n)}{\sqrt{\Delta_n}}) \in \mathbb{R}^n$  は

Hilbert 空間の間の orthogonal projection  
 を与える. かつ  $f \in E_{\mathbb{R}^n}$  について  $f(\frac{f(\Delta_1)}{\sqrt{\Delta_1}}, \dots, \frac{f(\Delta_n)}{\sqrt{\Delta_n}})$   
 は  $E_H$  の元を与える. (Prop. 3 より). 特に

$g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  として  $g_0(f) = g(f(\Delta_1), \dots, f(\Delta_n))$   
 とすると  $g_0 \in E(C)$  である.  $\mathcal{T}(g_0)(\xi)$  を  
 explicit に表わそう. Prop. 3, 4 より.

$$\mathcal{T}(g_0)(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\sqrt{\Delta_1} y_1, \dots, \sqrt{\Delta_n} y_n)$$

$$e^{\frac{i}{2} \sum |y_j - \langle \xi, \frac{\chi_{\Delta_j}}{\sqrt{\Delta_j}} \rangle|^2} dy_1 \dots dy_n$$

$$= \frac{1}{\prod_{j=1}^n \sqrt{2\pi i} |\Delta_j|} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \dots, x_n) e^{\frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{|x_j - \langle \xi, x_j \rangle|^2}{|\Delta_j|}} dx_1 \dots dx_n$$

$$\int_H \varphi_F d\mu_F = \frac{1}{\prod_{j=1}^n \sqrt{2\pi i} |\Delta_j|} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \dots, x_n) e^{\frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{|\Delta_j|}} dx_1 \dots dx_n$$

4)  $F(x_0, x_1, \dots, x_n) \in L^1(\mathbb{R}^{n+1}) \Rightarrow \mathcal{J}_F(\gamma) \equiv \int_0^t \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} F(\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)) dt_1 \dots dt_n \in E(\mathbb{C})$

を次のように定義しよう.

$$\mathcal{J}(\varphi_F)(\xi) = \int_0^t \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{F(\eta + \sum_{j=0}^n (t_{j+1} - t_j) y_j, \dots, \eta + (t_{n+1} - t_n) y_n)}{(\sqrt{2\pi i})^{n+1}} e^{\frac{i}{2} \sum_{j=0}^n |y_j - \langle \xi, \frac{x_{[t_j, t_{j+1}]} \rangle|^2}{|t_{j+1} - t_j|}} dy_0 \dots dy_{n+1} dt_1 \dots dt_n$$

ただし  $t_0 = 0, t_{n+1} = t$ . この積分は well defined.

変数変換を

$$\mathcal{J}(\varphi_F)(\xi) = \int_0^t \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{F(\eta + \sum_{j=0}^n x_j, \eta + \sum_{j=1}^n x_j, \dots, \eta + x_n)}{\prod_{j=0}^n \sqrt{2\pi i} (t_{j+1} - t_j)} e^{\frac{i}{2} \sum_{j=0}^n \frac{|x_j - \langle \xi, x_{[t_j, t_{j+1}]} \rangle|^2}{|t_{j+1} - t_j|}} dx_0 \dots dx_n dt_1 \dots dt_n$$

$$\int_H \varphi_F d\mu_F = \int_0^t \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{\varphi(\eta + \sum_{j=0}^n x_j, \dots, \eta + x_n)}{\prod_{j=0}^n \sqrt{2\pi i} (t_{j+1} - t_j)} e^{\frac{i}{2} \sum_{j=0}^n \frac{x_j^2}{|t_{j+1} - t_j|}} dx_0 \dots dx_n dt_1 \dots dt_n$$

5) 最後に  $V \in L^1(R)$ ,  $\varphi \in L^1(R)$  について  
 $\varphi(x) \equiv e^{-i \int_0^x V(x(z)) dz} \varphi(x(0)) \in E(C)$   
 を次の式で定義しよう。

$$\varphi \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_0^x \int_0^{t_1} \varphi(x(0)) V(x(t_1)) \cdots V(x(t_n)) dt_1 \cdots dt_n$$

右辺の各項は  $\varphi(x_0) V(x_1) \cdots V(x_n) \in L^1(R^{n+1})$

より、4) の結果より、 $E(C)$  の元を定義している。

$\varphi$  は Banach space  $E(C)$  valued の級数  
 として絶対収束し、 $\varphi \in E(C)$  である事が  
 分る。

$$\begin{aligned} \int_H e^{-i \int_0^x V(x(z)) dz} \varphi(x(0)) d\mu_F &= \int_H \varphi(x) d\mu_F \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_0^x \int_0^{t_1} \int_{R^{n+1}} \frac{\varphi(x + \sum_{j=0}^n x_j) V(x + \sum_{j=1}^n x_j) \cdots V(x + x_n)}{\prod_{j=0}^n \sqrt{2\pi i (t_{j+1} - t_j)}} \\ &\quad e^{\frac{i}{2} \sum_{j=0}^n \frac{x_j^2}{t_{j+1} - t_j}} dx_0 \cdots dx_n dt_1 \cdots dt_n \end{aligned}$$

文 献.

[1] R. Feynman. Rev. Mod. Phys. 20 367. (1948)

[2] 竹田武幸. : ブラウシ運動. 岩波書店(1975)